$Valor\ Medio$: $\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)dx$ $\quad VA\ discrete$: $E[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$

$Proprieta'$: 1) $f_x(x)$ $simmetrica\ a\ x = a \rightarrow E[X] = a$ 2) $X\ limitata\ [a \leq X \leq b] \rightarrow a \leq E[X] \leq b$

$Teorema\ aspettazione$: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x)dx$ $\quad VA\ discrete$: $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{k} p_X(x_i) \cdot g(x_i)$

$Linearita'$: $Y = g(X), Z = h(X) \rightarrow E[cY + dZ] = cE[Y] + dE[Z]$ $\quad E[c] = c$

$Varianza$: $\sigma^2{}_x = E[(X - \mu_x)^2] = Var[X]$ $(valor\ medio\ dello\ scarto\ quadratico)$

$Proprieta'$: $Var[X] \geq 0$ $\quad Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ $\quad Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

$Deviazione\ standard$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$

$Nella\ PDF\ Gaussiana, il\ \mu\ indica\ il\ valor\ medio\ e\ il\ \sigma\ la\ varianza$

$Diseguaglianza\ di\ Markov$: $data\ g(X) = \frac{X}{b}, P\{X \geq b\} \leq E\left[\frac{X}{b}\right] = \frac{1}{b}E[X]$

$Diseguaglianza\ di\ Chebychev$: $P\{|X - \mu_X| \geq \varepsilon\} \leq \left(\frac{\sigma_X}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$

$Momenti$: $m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_x(x)dx$ $\quad MGF$: $\phi_X(s) = E[e^{sx}] \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\, e^{st} dt \quad \forall s \in C$

$Per\ trovare\ la\ varianza\ con\ i\ momenti, eseguo\ questi\ passi$:

1) $trovo\ la\ MGF\ tramite\ la\ definizione$
2) $trovo\ E[X] = \phi_X{}^{(1)}(0)$
3) $trovo\ E[X^2] = \phi_X{}^{(2)}(0)$
4) $trovo\ Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$Teorema\ dei\ momenti$

$E[X^n] = m_n = \phi_x{}^{(n)}(0)$

$CDF\ condizionata$: $F_X(\infty|M) = 1$ $\quad F_X(-\infty|M) = 0$ $\quad P\{x_1 < X \leq x_2|M\} = F_X(x_2|M) - F_X(x_1|M)$

$Se\ Y = g(X)\ f_y(Y|M) = \frac{f_X(x_1|M)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n|M)}{|g'(x_n)|}$ $\quad E[X|M] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x|M)dx$

$Probabilita'\ totale$: $f_x(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_x(x|A_i) \cdot P(A_i)$ $\quad E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|A_i] \cdot P(A_i)$

$E[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_x(x|A_i)dx$ $\quad P\{X \leq x|M\} = F_X(x|M) = \frac{P\{X \leq x \cap M\}}{P(M)}$

$Formula\ di\ Bayes\ continua$: $P(M|X = x) = \frac{f_X(x|M) \cdot P(M)}{f_X(x)}$ $\quad f_X(x|M) = \frac{P(M|X = x) \cdot f_X(x)}{P(M)}$ $\quad se\ P(X = x) = 0$

$Formula\ di\ Bayes\ discreta$: $P(M|X = x) = \frac{P(X = x|M) \cdot P(M)}{P(X = x)}$ $\quad se\ P(X = x) > 0$

$CDF\ congiunta$: $F_{XY}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ $\quad CDF\ marginali$: $F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty)$ $\quad F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y)$

$P\{X > x_1, Y > y_1\} = 1 - F_{XY}(\infty, y_1) - F_{XY}(x_1, \infty) + F_{XY}(x_1, y_1)$

$P\{x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\} = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$

$PMF\ congiunta$: $P\{X = x_i, Y = y_k\} = p_{XY}(x_i, y_k) = p_{ik}$ $\quad F_{XY}(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_k \leq y} p_{XY}(x_i, y_k)$

$PMF\ marginali$: $p_X(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{XY}(x_i, y_k)$ $\quad p_Y(y_k) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{XY}(x_i, y_k)$

$PDF\ congiunta\ (f_{XY}(x, y))$: $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(x,y) \in D} f_{XY}(x, y)\, dxdy$

$PDF\ marginali$: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx$

$Condizioni\ di\ Indipendenza$

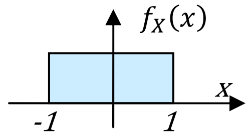
$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

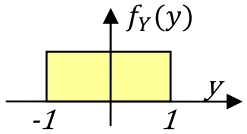
$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$p_{XY}(x, y) = f_X(x_i) \cdot f_y(y_k) \quad \forall x_i, y_k$

$Se\ X\ e\ Y\ sono\ indipendenti, lo\ sono\ anche\ Z = g(X)\ e\ W = h(Y)$

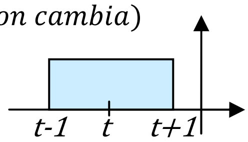
$CONVOLUZIONE$: $serve\ per\ sommare\ due\ o\ piu'\ VA.$ $Esempio$: $due\ VA\ uniformi\ [-1,1], cerco\ Z = X + Y$



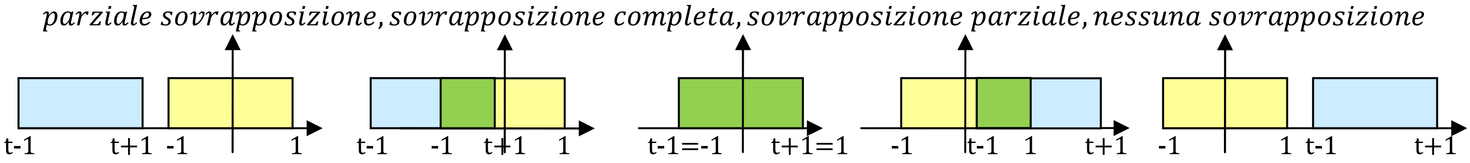


1) $Ribalto\ f_X(x)\ rispetto\ all'asse\ y\ per\ ottenere\ f_X(-u) (in\ questo\ es, non\ cambia)$

2) $Traslo\ f_X\ di\ un\ valore\ generico\ t\ per\ ottenere\ una\ f_X(t - u)\ centrata\ in\ t\ invece\ che\ in\ 0$



3) $Considero\ i\ vari\ casi\ al\ variare\ di\ t$: $nessuna\ sovrapposizione\ tra\ le\ f_X(t - u)\ e\ f_Y(u)$, $parziale\ sovrapposizione, sovrapposizione\ completa, sovrapposizione\ parziale, nessuna\ sovrapposizione$



4) $Se\ la\ sovrapposizione\ e'nulla,\ f_Z(z)=0; altrimenti,\ f_Z(z)=\int_a^b f_X(t-u)\cdot f_Y(y)du$ $a\ e\ b\ estremi\ della\ sovrapposizione$
5) $Il\ risultato\ sara'una\ f_Z(z)\ definita\ a\ tratti\ a\ seconda\ del\ valore\ di\ t.$
$Ricorda$: $la\ somma\ di\ due\ rettangoli\ e'un\ triangolo\ con\ altezza\ uguale\ al\ prodotto\ delle\ altezze.$

$Trasformazione\ di\ coppie\ di\ VA$: $dato\ il\ sistema\ \begin{cases} Z=g(X,Y)\\ W=h(X,Y)\end{cases}$ $per\ trovare\ la\ f_{ZW}(z,w)\ applico\ il\ teorema\ fondamentale\ seguendo\ i\ seguenti\ passi$:

1) $se\ il\ sistema\ \begin{cases} z=g(x,y)\\ w=h(x,y)\end{cases}\ non\ ha\ soluzioni, allora\ f_{ZW}(z,w)=0$

2) $se\ ha\ soluzioni\ (x_i,y_i)\ si\ ha\ f_{ZW}(z,w)=\dfrac{f_{XY}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|}+\cdots+\dfrac{f_{XY}(x_n,y_n)}{|J(x_n,y_n)|}$

$$J=det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{bmatrix}\ o\ \dfrac{1}{det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\end{bmatrix}}$$

$Metodo\ della\ variabile\ ausiliaria$: $per\ usare\ il\ teorema\ fondamentale\ per\ il\ calcolo\ della\ PDF\ di\ una\ sola\ funzione\ Z=g(X,Y), posso\ introdurre\ una\ variabile\ ausiliaria, ad\ es.\ W=X\ o\ W=Y, e\ risolvere\ il\ sistema\ come\ mostrato\ in\ precedenza.$

$PDF\ o\ CDF\ di\ X\ condizionata\ a\ Y=y.$ $Si\ distinguono\ vari\ casi\ a\ seconda\ della\ natura\ di\ X\ e\ Y$:

$-\ Y\ continua$: $F_X(x|Y=y)=\dfrac{\frac{\partial}{\partial y}[F_{XY}(x,y)]}{f_Y(y)}$

$-\ X\ e\ Y\ continue$: $f_X(x|Y=y)=\dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ $\quad \begin{cases} f_X(x|y)=f_X(x)\\ f_Y(y|x)=f_Y(y)\end{cases} \leftrightarrow X\ e\ Y\ sono\ indipendenti$

$-\ X\ e\ Y\ discrete$: $P(Y=y_k)=\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_k\}$ $\quad \begin{cases} p_Y(y_k)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{XY}(x_i,y_k)\\ p_X(x_i)=\sum_{k=1}^{\infty}p_{XY}(x_i,y_k)\end{cases}$

$Con\ il\ teorema\ dell'aspettazione, posso\ calcolare\ il\ valor\ medio\ di\ Z=g(X,Y)\ nel\ seguente\ modo$:

$E[g(X,Y)]=\iint_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\cdot f_{XY}(x,y)dxdy\ \ se\ X,Y\ continue, oppure=\sum_i\sum_k g(x_i,y_k)\cdot p_{XY}(x_i,y_k)\ se\ discrete$

$Medie\ condizionate\ (P(M)>0)$:

$E[X|M]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x|M)\,dx & se\ X\ e'continua\\ \sum_i x_i\cdot p_X(x|M) & se\ X\ e'discreta\end{cases}$ $\quad A\ seconda\ della\ natura\ di\ Y\ si\ distinguono\ due\ casi$:

$-\ Y\ discreta$: $M=\{Y=y_k\}\ e\ P\{Y=y_k\}>0\quad E[X|Y=y_k]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x|Y=y_k)dx & se\ X\ e'continua\\ \sum_i x_i\cdot p_X(x|Y=y_k) & se\ X\ e'discreta\end{cases}$

$-\ Y\ continua$: $M=\{Y=y\}\ e\ P\{Y=y\}=0\quad E[X|Y=y]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x|y)dx & se\ X\ e'continua\\ \sum_i x_i\cdot p_X(x|Y=y) & se\ X\ e'discreta\end{cases}$

$Teorema\ della\ media\ condizionata$: $E\big[E[X|Y]\big]=E[X]\quad e\quad E\big[E[Y|X]\big]=E[Y]$

$Proprieta'della\ media$: $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]\qquad Se\ X>Y\rightarrow E[X]>E[Y]\quad E[XY]^2\le E[X^2]E[Y^2]$

$Media\ campione$: $\bar{X}_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\qquad E[\bar{X}_n]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[X_i]=\mu_X$

$Correlazione\ di\ X\ e\ Y\rightarrow E[XY]\quad X\ e\ Y\ incorrelate\ \leftrightarrow E[XY]=E[X]E[Y]\quad X\ e\ Y\ indipendenti\rightarrow incorrelate$

$Covarianza$: $Cov[X,Y]=C_{XY}=E[XY]-E[X]E[Y]\quad X\ e\ Y\ incorrelate\ \leftrightarrow C_{XY}=0$

$Proprieta'della\ covarianza$:

1) $Cov[X,Y]=Cov[Y,X]$ 2) $Cov[X,X]=Var[X]$ 3) $Cov[X,a]=0\ \ \forall a\in R$

4) $bilinearita'$: $Cov\sum_{i=1}^n a_iX_i\sum_{j=1}^n b_jY_j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_jCov\big[X_i,Y_j\big]$ 5) $Cov[X+a,Y+b]=Cov[X,Y]$

6) $Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=\sum_{i=1}^n Var[X_i]+2\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^{j-1}Cov[X_i,Y_j]$ 7) $se\ X\ e\ Y\ incorrelate\rightarrow Var\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=\sum_{i=1}^n Var[X_i]$

$Coefficiente\ di\ correlazione$: $\rho_{XY}=\dfrac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]\cdot Var[Y]}}=\dfrac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\qquad |\rho_{XY}|\le 1$

$MGF\ di\ somme\ di\ VA\ indip.$: $\phi_Z(s)=E[e^{sZ}]=\prod_{i=1}^n\phi_{X_i}(s)\qquad Se\ X_i\ IID\ e\ MGF\ comune, \phi_Z(s)=[\phi_X(s)]^n$

$Teorema\ Limite\ Centrale$: $date\ n\ VA \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\quad Z_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \rightarrow \lim_{n\to\infty}\phi_{Z_n}(s) = e^{\frac{s^2}{2}}\ MGF \sim N(0,1)$

$Il\ TLC\ si\ usa\ per\ fare\ somme\ di\ n\ VA \sim N(\mu,\sigma^2)$: $sapendo\ che\ il\ risultato\ e'una\ Gaussiana, utilizzo\ la\ funzione\ Q\ che\ approssima\ il\ valore\ della\ CDF$: $P\{S_n \le s\} \cong 1 - Q\left(\frac{s-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

$Date\ n\ prove\ ripetute\ con\ VA\ di\ Bernoulli\ X_i = \{successo\ all'i-esima\ prova\}\ che\ assume\ valore\ 1\ con\ probabilita'\ p\ e\ 0\ con\ probabilita'\ 1-p, e\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\ e'\ una\ VA\ binomiale\ con\ parametri\ n\ e\ p,\ media\ np\ e\ varianza\ np(1-p), si\ ha\ che$:

$-\ se\ n \gg 1\ e\ np(1-p) \gg 1 \rightarrow\ P\{S_n = k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \cong \frac{e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}}{\sqrt{2\pi\, np(1-p)}}, cioe'una\ Gaussiana$

$-\ se\ n \gg 1\ e\ np(1-p) \le 1 \rightarrow\ P\{S_n = k\} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \cong \frac{(np)^k}{k!}e^{-np}, cioe'una\ Poisson(np)$

RIASSUNTO ROBA VECCHIA

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x\delta(x-a)\,dx = a$

Variabili Aleatorie Continue

$V.A. Gaussiana\ o\ Normale\ di\ parametri\ \eta\ e\ \sigma^2 \quad X \sim N(\eta,\sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}} \quad F_X(x) = 1 - Q\left(\frac{x-\eta}{\sigma}\right) \quad Q_a(x) = \frac{1}{[-(-\sqrt{x^2+b}+x)\cdot a + x]\cdot\sqrt{2\pi e^{x^2}}} \quad \begin{matrix} a = 0{,}344 \\ b = 5{,}334 \end{matrix}$

$V.A. Esponenziale\ negativa\ di\ parametro\ \lambda \quad X \sim \exp(\lambda)$

$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & se\ x \ge 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x}U(x) \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & se\ x \ge 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\cdot U(x)$

$V.A. Uniforme\ nell'intervallo[a,b]$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a \le x \le b \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & se\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & se\ a \le x \le b \\ 1 & se\ x > b \end{cases}$

Variabili Aleatorie Discrete

$V.A. Poisson\ di\ parametro\ \lambda > 0 \qquad X \sim Poisson(\lambda) \qquad p_i = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0,1,\ldots$

$V.A. Bernoulli\ di\ parametro\ p \in [0,1]\ \ X \sim Bernoulli(p)\ \ p_1 = P\{X=1\} = p\ \ p_2 = P\{X=0\} = 1-p$

$V.A. Binomiale\ di\ parametri\ n\ e\ p \in [0,1] \qquad X \sim Bin(n,p) \qquad p_i = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\ \ i = 0,1,\ldots,n$

Funzioni di Variabili Aleatorie

$Vengono\ date\ g(x) e\ la\ PDF\ di\ X, cio$è $f_X(x). Devo\ trovare\ la\ PDF\ di\ Y = g(X(r)), cio$è $f_Y(y)$.

$-\ Caso\ X\ continua$

0) $guardo\ nel\ grafico\ di\ g(x)\ da\ dove\ a\ dove\ varia\ la\ y; fuori\ da\ questi\ valori, f_Y(y) = 0$.
1) $considero\ i\ tratti\ costanti\ del\ grafico\ di\ g(x); detto\ y_0\ il\ valore\ costante, trovo\ P\{Y = y_0\} = P\{x_0 < X < x_1\} = F_X(x_1) - F_X(x_0) con\ x_0\ e\ x_1\ estremi\ dell'intervallo\ in\ cui\ g(x) = y_0; scrivo\ quindi\ la\ f_Y(y) = P\{x_0 < X < x_1\}\cdot\delta(y-y_0) + c(y); il\ punto\ va\ ripetuto\ se + tratti\ costanti$.
2) $nella\ restante\ parte\ del\ grafico\ di\ g(x), conto\ il\ numero\ di\ intersezioni\ tra\ una\ retta\ orizzontale\ e\ g(x); ricavo\ le\ n\ soluzioni\ cio$è $i\ valori\ di\ x\ in\ funzione\ di\ y; calcolo\ la\ g'(x)$;
   $f_Y^c(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}\ dove\ f_X(x_i)$ è $la\ PDF\ di\ partenza\ calcolata\ nelle\ soluzioni\ x_i$.
   $Infine, unisco\ tutto\ e\ diventa$
   $f_Y(y) = c(y) + P\{x_0 < X < x_1\}\cdot\delta(y-y_0)\ldots \quad con\ c(y) = \begin{cases} f_Y^c(y) & se\ y \in codominio\ di\ g(x) \\ 0 & fuori\ dal\ codominio\ di\ g(x) \end{cases}$

$-\ Caso\ X\ discreta$

0) $disegno\ il\ grafico\ di\ g(x)\ riportando\ i\ punti\ di\ X\ e\ trovando\ i\ valori\ y_i$;
1) $calcolo\ la\ probabilita'in\ ogni\ punto\ come\ \{Y = y_i\}, tenendo\ conto\ che\ se\ y_i\ e'immagine\ di\ piu'di\ una\ x, devo\ sommare\ le\ varie\ probabilita'P\{Y = y_i\} = P\{X = x_1\} + P\{X = x_2\}$;
2) $la\ PDF\ sara'del\ tipo$: $f_Y(y) = P\{Y = y_1\}\cdot\delta(y-y_1) + P\{Y = y_2\}\cdot\delta(y-y_2)\ldots$